

# Modélisation du problème d'allocation de fréquences (Corrigé)

**Description.** Le problème d'affectation de fréquences est l'une des phases clé de la conception des réseaux mobiles. Le problème consiste à répartir l'ensemble des fréquences disponible sur les stations de base du réseau. Chaque station requiert un certain nombre de fréquences égale au nombre d'émetteurs/récepteurs dont elle dispose. L'attribution des fréquences aux TRX est soumise à un ensemble de contraintes lié au phénomène d'interférence. Des TRX se trouvant sur des stations assez proches ne doivent pas utiliser des fréquences assez rapprochées sur le spectre.

Les premiers travaux de modélisation du problème se basent sur la notion de coloriage de graphe. Il s'agit de représenter les données et les contraintes du problème par un graphe où les sommets sont sensés être coloriés (les couleurs correspondent aux fréquences).

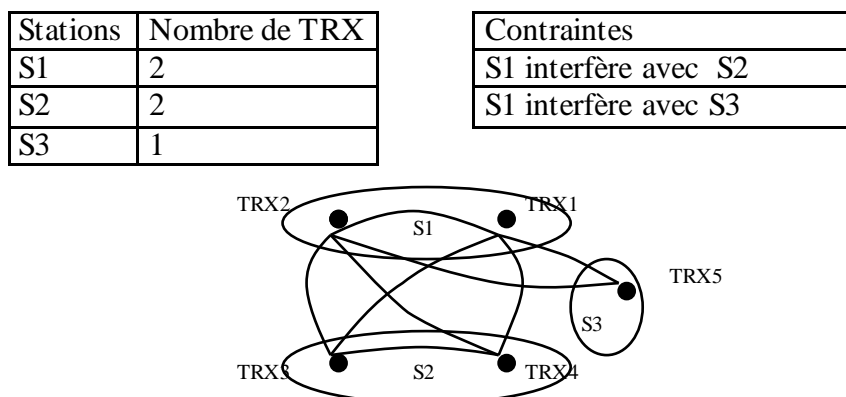
## Modèle N°1. Coloriage de graphe

Dans ce modèle, seules les contraintes d'interférence co-canal sont considérées. Les fréquences allouées à des TRX de la même station ou appartenant à des stations très rapprochées doivent être différentes.

- 1- Donnez la représentation en graphe du problème ainsi décrit, en précisant le type du graphe (orienté ou non) et pourquoi ? A quoi correspondent les sommets et les arcs du graphe et est-il intéressant d'associer des poids aux arcs ?

*Un réseau est modélisé par un graphe non orienté dont les nœuds représentent les TRX installés sur les stations et les arcs représentent les contraintes d'interférence co-canal. Le graphe est non orienté car la relation d'interférence est symétrique si un TRX  $i$  ne doit pas utiliser la même fréquence que le TRX  $j$  alors l'inverse est aussi vrai.*

- 2- Donnez la représentation en graphe du problème suivant :



- 3- Proposez une structure de données informatique pour représenter le graphe.

*Deux représentations informatiques sont possibles :*

- a. Un tableau d'enregistrement représentant l'ensemble des liens d'interférence de la forme où sommet1 et sommet2 représentent les extrémité d'un arc du graphe.

Sommet1	Sommet2
---------	---------

- b. Une matrice  $M$  de dimension  $T \times T$  ( $T$  représente le nombre total de TRX).  $M = m_{ij}$  tel que :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si les TRX } i \text{ et } j \text{ ne sont pas reliés par un arc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

	TRX <sub>1</sub>	TRX <sub>2</sub>	...	TRX <sub>i</sub>	...	TRX <sub>T</sub>
TRX <sub>1</sub>	0			1/0		
TRX <sub>2</sub>		0		1/0		
...			...	...		
TRX <sub>i</sub>	1/0	1/0	...	0	...	1/0
...				...	...	
TRX <sub>T</sub>				1/0		0

- 4- Décrivez les variables du problème en désignant les variables de décision (variables dont les valeur sont à trouver).

*Le problème d'affectation de fréquences modélisé comme un problème de coloriage de graphes est formalisé comme suit:*

*N: Nombre de stations*

*T: Nombre total de TRX*

*NF: nombre de fréquences disponibles*

*$m_{ij}$ : variable égale à 1 si les TRX  $i$  et  $j$  sont reliés par une contrainte d'espacement co-canal, 0 sinon*

*$f_i$ : variables de décision indiquant la fréquence allouée au TRX  $i$*

- 5- Proposez une fonction d'évaluation permettant de mesurer le degré de satisfaction du plan de fréquences.

$$C(f_1, \dots, f_T) = \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=i+1}^T (m_{ij} \times 1(f_i == f_j))$$

*Cette fonction est une fonction à minimiser. Elle mesure le nombre de contraintes d'interférence co-canal non satisfaites par le plan de fréquence. Il s'agit alors de trouver les valeur de  $f_i$  qui minimise (idéalement annule) la valeur de la fonction  $C$  (aucune contrainte violée). La fonction 1 représente la fonction indicatrice qui rend 1 si la condition est vérifiée et 0 sinon.*

## Modèle N°2. T-Coloriage de graphe

Il s'agit maintenant d'intégrer les contraintes de canal adjacent. Pour cela on considérera une relation d'ordre total entre les fréquences (couleurs). Les contraintes d'interférence sont alors exprimées par une distance  $d$  à respecter entre les couleurs affectées aux TRX. Cette distance serait égale à 1 pour exprimer une contrainte co-canal.

- 1- Quel serait la modification à opérer sur le graphe représentant le problème pour introduire la notion de contrainte canal adjacent ?

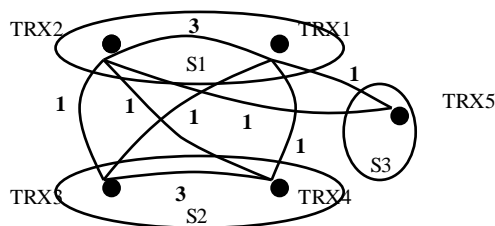
*Pour cela, chaque arc du graphe se voit associer un poids représentant l'espacement inter-canal requis entre les fréquences allouées aux deux TRX.*

- 2- Comment ce changement va t-il se répercuter sur la structure de donnée proposée précédemment ?

*La matrice  $M$  ne représentera plus une matrice binaire mais contiendra directement la valeur de l'espacement requis entre les TRX.*

*$m_{ij}$  la distance inter-canal à respecter entre les TRX  $i$  et  $j$ .*

- 3- Donnez la représentation en graphe du problème cité à la question (1.2) en considérant une distance inter-canal de 3 entre les TRX d'une même stations.



- 4- Quelles sont les variables supplémentaires qui interviennent dans la description du problème ?

*La variable  $m_{ij}$  change de signification est représente maintenant l'écart inter-canal à conserver entre les TRX  $i$  et  $j$ .*

- 5- Ecrivez à nouveau la fonction d'évaluation précédente pour tenir compte de ce changement.

$$C(f_1, \dots, f_T) = \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=i+1}^T \left( 1 - \mathbb{1}_{|f_i - f_j| < m_{ij}} \right)$$

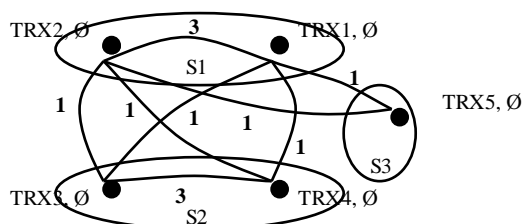
*L'objectif étant toujours de trouver les valeurs de  $f_i$  qui minimisent la fonction  $C$*

### Modèle N°3. Liste T-Coloriage de graphe

Dans les réseaux mobiles il est commun d'interdire un certain nombre de fréquences pour certaines stations et donc pour certain TRX. Ceci est notamment le cas, quand deux opérateurs de deux pays limitrophes conviennent de se partager le spectre sur la zone frontalière afin d'éviter les interférences.

- 1- De la même manière il est demandé de donner la représentation en graphe du problème décrit.

*Chaque sommet se voit associer un ensemble indiquant la liste des fréquences interdites pour cette station. Dans le cas de l'exemple, aucune fréquence interdite n'est stipulée donc nous indiquons des ensembles vides  $\emptyset$ .*



- 2- Décrivez les variables supplémentaires nécessaires pour formulation du problème.

*$FI_i$ : représente la liste des fréquences interdites pour le TRX  $i$*

- 3- Ecrivez la fonction d'évaluation afin d'empêcher ou de sanctionner l'utilisation des fréquences bloquées.

$$C(f_1, \dots, f_T) = \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=i+1}^T \left( 1(|f_i - f_j| < m_{ij}) \right) + \sum_{i=1}^T 1(f_i \in FI_i)$$

*La fonction de coût est composée de deux parties. La première partie se rapporte au nombre de contraintes d'interférence non satisfaites. La deuxième partie indique le nombre de contrainte de canal interdit violée. Autrement dit le nombre de TRX dont la fréquence allouée est interdite pour la station.*

#### Modèle N°4. Ensemble-Coloriage

En réalité les TRX sont regroupés au sein des stations. Les TRX d'une même station participent aux mêmes types de contraintes. Le fait que les TRX d'une même station présentent le même voisinage rend leur regroupement dans un même sommet un moyen intéressant pour réduire la complexité du problème.

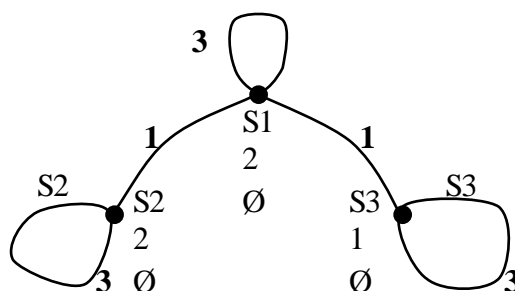
- 1- Que représente alors un sommet du graphe ?

*Dans ce cas, les sommets représentent les stations du réseaux*

- 2- Donnez la représentation en graphe du problème de la question 1.2.

*Le regroupement des TRX d'une même station au sein d'un même sommet rend nécessaire le rajout des boucles sur les sommets pour indiquer que les TRX d'une même station doivent utiliser des fréquences espacées de 3 canaux.*

*A chaque sommet du graphe est associé, une valeur indiquant le nombre de TRX qu'il contient ainsi que la liste des fréquences interdites. Les arcs sont munis de poids correspondant à la distance inter-canal à respecter entre les fréquences des stations.*



- 3- Quelles sont les variables permettant de décrire le problème en précisant les variables de décision ?

*$N$ : Nombre de stations*

*$NbTRX_i$ : nombre de TRX installés sur la station  $i$*

*$m_{ij}$ : distance inter-canal à respecter entre les fréquences allouées aux stations  $i$  et  $j$*

*$NF$ : nombre de fréquences disponibles*

*$FI_i$ : fréquences interdites pour la station  $i$*

*$f_{i,j}$ : jème fréquence allouée à la station  $i$*

- 4- Donnez la fonction d'évaluation permettant de mesurer le degré d'adéquation d'un plan de fréquence.

$$C(f_{1,1}, \dots, f_{N, nbTRX_N}) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i}^N \sum_{k=1}^{nbTRX_i} \sum_{\substack{p=1 \\ (i,k) \neq (j,p)}}^{nbTRX_j} \left( 1 \left( |f_{i,k} - f_{j,p}| < m_{ij} \right) \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{nbTRX_i} 1(f_{i,k} \in FI_i)$$

*La condition  $(i,k) \neq (j,p)$  empêche de comparer une fréquence d'un TRX avec elle même. Bien sûr, les fréquences d'une même station seront comparées pour vérifier si les contraintes co-station sont satisfaites.*